



sketchometry

Herausgeber

Universität Bayreuth

Forschungsstelle für Mobiles Lernen mit digitalen Medien

sketchometry

Universitätsstraße 30

95447 Bayreuth

Internet

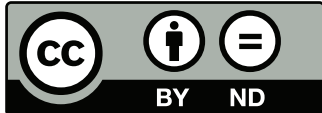
<http://heftreihe.sketchometry.org>



Lizenz

Diese Publikation ist unter folgender Lizenz erschienen:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/>



Titel

sketchometry

Heft

5

Kreise und Tangenten – Ein Stundenprotokoll

Autorin

Lena Reinke

Universität Bayreuth

Bayreuth

Überarbeitung

Carsten Miller

Universität Bayreuth

Bayreuth

Erscheinungsjahr

2015

ISSN

2364-5520

Vorwort

Seit mehr als 20 Jahren gehören Konzepte zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht zu den Forschungsschwerpunkten des Lehrstuhls für Mathematik und ihre Didaktik. Es geht dabei vor allem um die Entwicklung dynamischer Mathematiksoftware und um die Erprobung zugehöriger Unterrichtskonzepte. Erfolgreiche Projekte sind die Softwareprodukte GEONET (1995–1999) und GEONEX_T (1999–2013), die Grafikbibliothek JSXGraph (seit 2007) sowie die innovative gestengesteuerte Software sketchometry (seit 2011). All diese Aktivitäten werden seit 2013 durch die Forschungsstelle *Mobiles Lernen mit digitalen Medien* der Universität Bayreuth gebündelt.

Modellversuch

In einem Modellversuch erproben Lehrkräfte den Einsatz von sketchometry an zwei Bayreuther Schulen. Die Forschungsstelle Mobiles Lernen mit digitalen Medien stellt dazu zwei Klassensätze Tablets und die zugehörige Infrastruktur zur Verfügung. Mitglieder der Forschungsstelle unterstützen die beteiligten Lehrkräfte sowohl inhaltlich als auch technisch. Zudem findet eine begleitende Evaluation statt.

Am Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasium wird bereits seit Frühjahr 2013 im Geometrieunterricht der Jahrgangsstufe 7 regelmäßig mit sketchometry gearbeitet. Die Schule wurde dafür mit 15 Tablets (Apple iPad, 4. Generation) ausgestattet. Zwei Schülerinnen und Schüler „teilen“ sich jeweils ein Tablet. Darüber hinaus haben sie die Möglichkeit, ihre Bildschirminhalte drahtlos an einen Projektor zu übertragen. Im Klassenzimmer steht zudem eine elektronische Tafel mit einem Computer bereit.

An der Johannes-Kepler-Realschule werden seit Anfang 2015 Tablets (insgesamt 20 Geräte, Samsung Galaxy Tab 4) mit sketchometry in siebten, achten und neunten Klassen im Geometrieunterricht eingesetzt. Auch hier arbeiten je zwei Schülerinnen bzw. Schüler zusammen an einem Tablet. Die Bildschirminhalte können ebenfalls drahtlos zu einem Projektor übertragen werden. Damit sind sowohl die Lehrkräfte als auch die Schülergruppen in der Lage, ihre Ergebnisse der gesamten Klasse zu präsentieren.

Die Erfahrungen und Ergebnisse der Schulversuche werden unmittelbar bei der Weiterentwicklung der Software, der Konzepte für den Unterrichtseinsatz sowie bei der Erstellung von Unterrichtsmaterialien berücksichtigt.



Unterrichtsbeobachtungen

Die Mitglieder des sketchometry-Teams besuchen regelmäßig die Klassen des Modellversuchs, um den Einsatz von sketchometry live mitzuerleben.

Darüber hinaus hatten Studierende im Rahmen eines Seminars (Lehramtsausbildung im Fach Mathematik an der Universität Bayreuth) die Gelegenheit, Geometriestunden mit Tableteinsatz an den beiden Bayreuther Schulen zu erleben. Aus diesen Beobachtungen entstanden Unterrichtsprotokolle, die einen Einblick in die Arbeit der Schülerinnen und Schüler mit sketchometry gewähren.

Praxisbericht

Der folgende Praxisbericht gibt einen Einblick in eine Geometriestunde mit sketchometry in einer siebten Klasse des Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasiums in Bayreuth.

Kreise und Tangenten

Ein Stundenprotokoll

Wiederholung und Anwendung zur Winkelhalbierenden

Eine siebte Klasse des Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasiums in Bayreuth arbeitete während des gesamten Schuljahres im Geometrieunterricht mit Tablets und der Software sketchometry. In der hier beschriebenen Übungsstunde (Doppelstunde 90 min) werden zwei komplexere Aufgaben mit sketchometry gelöst. Bei der Klasse handelt es sich um eine reine Mädchenklasse.

Nach der Begrüßung und dem Austeilen der Tablets wiederholt die Lehrkraft kurz die verschiedenen Transversalen im Dreieck. Genannt werden von den Schülerinnen hier

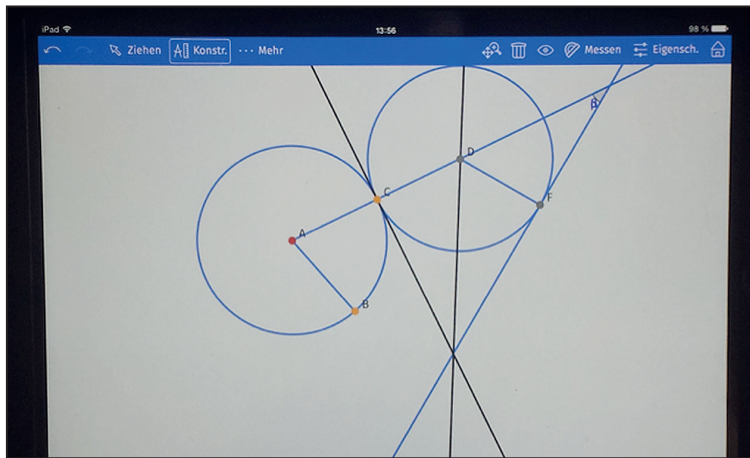
- ▶ Mittelsenkrechte und deren Schnittpunkt als Mittelpunkt des Umkreises,
- ▶ Winkelhalbierende und deren Schnittpunkt als Mittelpunkt des Inkreises,
- ▶ Seitenhalbierende und deren Schnittpunkt als Schwerpunkt des Dreiecks, wobei der Schwerpunkt der Punkt ist, an dem man ein Dreieck auf einem Stift ausbalancieren könnte und
- ▶ Höhen.

Anschließend sollen die Schülerinnen zur Wiederholung folgende Aufgabe mithilfe von sketchometry bearbeiten:

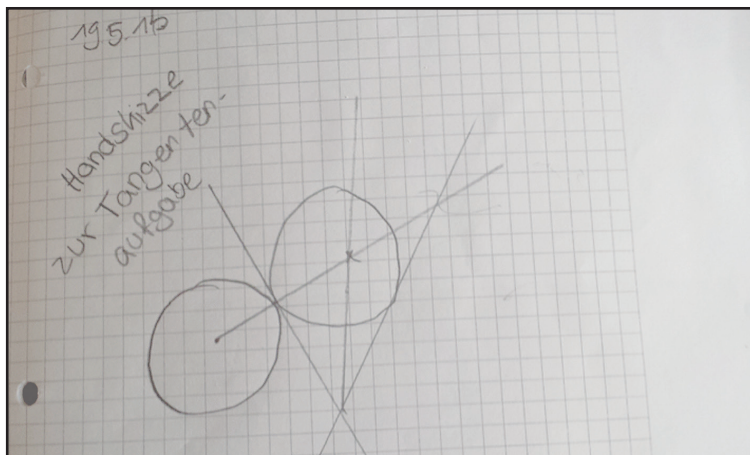
Gegeben ist ein Kreis um A mit Radius \overline{AB} , ein Punkt C (Gleiter) auf dem Kreis und eine Gerade g außerhalb des Kreises. Gesucht ist nun ein zweiter Kreis, welcher sowohl den ersten Kreis im Punkt C als auch die Gerade berührt.

Die Aufgabe ist der Klasse schon aus einer früheren Stunde zum Thema Tangenten bekannt und wurde damals bereits am Tablet gelöst.

Nach kurzer Zeit präsentiert eine Schülerin ihre Lösung über den Projektor und erläutert die wichtigsten Schritte. Der Bildschirminhalt der Tablets kann dabei drahtlos an den Projektor übertragen werden:



Danach fordert die Lehrperson die Schülerinnen auf, eine Lösungsskizze in ihrem Lerntagebuch anzufertigen:



Winkelhalbierende als Symmetrieachse

Die Winkelhalbierende als Spiegel- bzw. Symmetrieachse spielt in der folgenden Aufgabe eine zentrale Rolle. Daher betrachtet die Klasse zunächst die Winkelhalbierende unter dem Aspekt der Symmetrie und stellt den Bezug zur ersten Aufgabe her:

Die Winkelhalbierende kann bei der Lösung der ersten Aufgabe als Symmetrieachse des gesuchten Kreises aufgefasst werden.

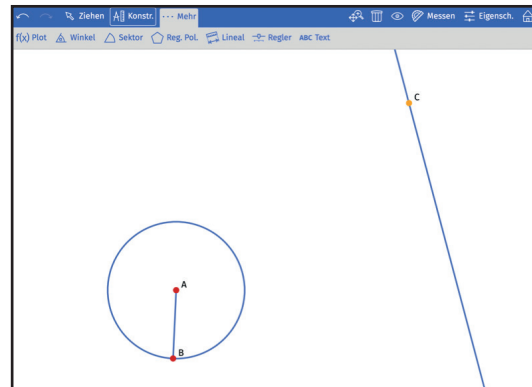
Anschließend präsentiert die Lehrkraft eine neue Aufgabe (am Projektor).

Zeichnet eine Strecke $[AB]$, dann einen Kreis um A mit dem Radius \overline{AB} und eine Gerade rechts davon nicht zu nahe am Kreis. Setzt auf die Gerade einen Gleiter C . Konstruiert einen zweiten Kreis, der die Gerade in C und auch den ersten Kreis berührt. Zeichnet dazu geeignete Skizzen im Lerntagebuch und experimentiert mit dem Tablet.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der vorherigen Aufgabe dadurch, dass der Gleiter C nun nicht mehr auf dem ersten Kreis, sondern auf der Geraden liegt, was den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe erhöht.

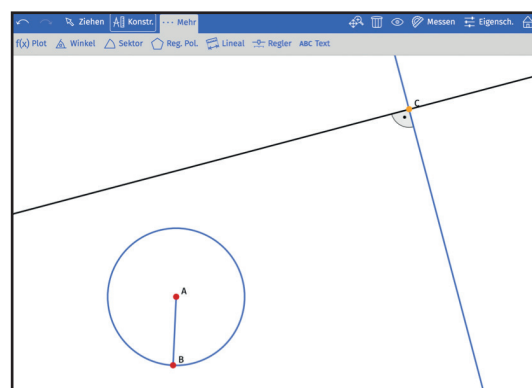
Die Lehrkraft fertigt an der Tafel eine Skizze mit den gegebenen Objekten an, die Schülerinnen konstruieren den Kreis und die Gerade direkt am Tablet.

Manche Schülerinnen verändern die dynamische Konstruktion am Tablet dahingehend, dass sie der Skizze (Lage der Geraden zum Kreis) der Lehrkraft an der Tafel möglichst stark ähnelt.



Im Unterrichtsgespräch wird nun eine Lösungsidee gemeinsam entwickelt. Die Schülertablets kommen dabei vorerst nicht zum Einsatz. Die Lehrkraft fragt, wo der Mittelpunkt des gesuchten Kreises in etwa liegen müsse. Von den Schülerinnen kommt mehrfach die Antwort „Winkelhalbierende“, da aus der vorherigen Aufgabe bekannt ist, dass der Mittelpunkt eines neuen Kreises, der sowohl den gegebenen Kreis als auch die Gerade berührt, auf der Winkelhalbierenden liegen müsse. Die Lehrperson wirft ein, dass in der bisherigen Konstruktion kein Winkel gegeben sei, zu welchem die Winkelhalbierende konstruiert werden könne. Durch Nachfragen der Lehrkraft, was für die Tangente und den Radius eines Kreises gelte, fällt das Stichwort „Senkrechte“ und „Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss auf der Senkrechten durch C liegen.“

Daraufhin zeichnet die Lehrperson am Computer die Senkrechte durch den Gleiter C ein. Die Schülerinnen arbeiten parallel dazu mit ihren Tablets.

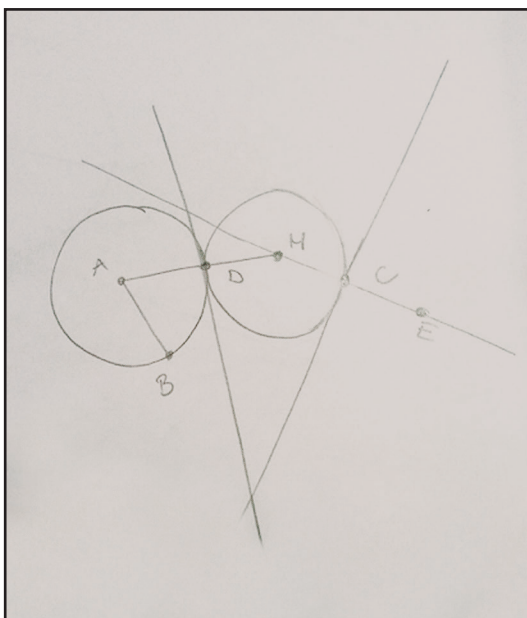
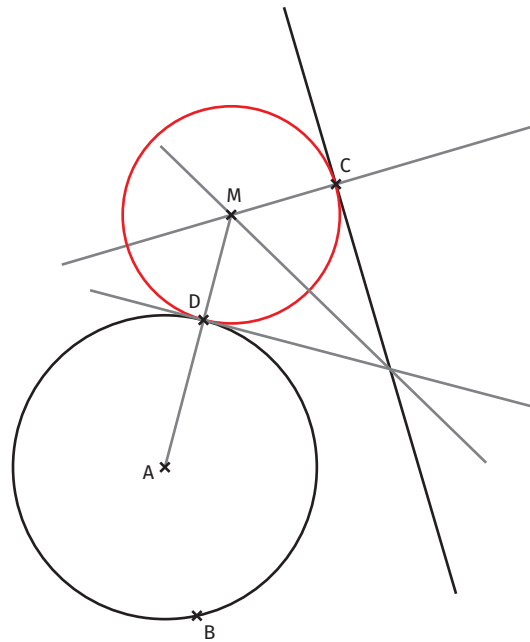


Lösungsidee durch Einpassen

Außerdem erzeugt die Lehrkraft einen freien Kreis, dessen Lage und Größe verändert wird, bis er in etwa die gewünschte Position hat und die beiden gegebenen Objekte berührt.

Die Lehrkraft wechselt hier zwischen einer Lösungsskizze an der Tafel und einer Konstruktion mit sketchometry. Die Skizze an der Tafel dient dabei als erster Überblick über die Aufgabe. Die dynamische Konstruktion mit dem veränderlichen Kreis soll aufzeigen, wie die Lösung in etwa aussehen könnte.

Nun trifft die Lehrperson die Annahme, dass die Lösung schon gegeben sei und zeichnet in seine Kreideskizze den gesuchten Kreis ein. Durch Nachfragen erkennen die Schülerinnen, dass der gesuchte Kreismittelpunkt M auf der Winkelhalbierenden der gegebenen Geraden und der Tangente an den Kreis im Punkt D liegen muss.

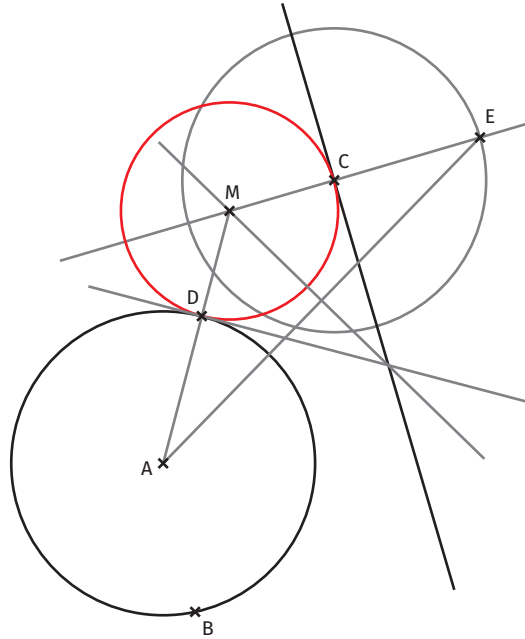


Sie erhalten anschließend den Tipp, dass der ursprüngliche Kreis um A an dieser Winkelhalbierenden gespiegelt werden könnte. In der Tafelskizze (nebenstehend nachempfunden) werden nun A und M verbunden, der Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit dem ursprünglichen Kreis wird D genannt, sein Spiegelpunkt (Bildpunkt) sei der gegebene Punkt C .

Nun werden die Schülerinnen gefragt, wie der Bildpunkt E von Urbildpunkt A zustande kommt und wie weit er von C entfernt sei. Es wird erkannt, dass die Entfernung von C zu E genau der Länge des Radius \overline{AB} des Kreises entspricht und dass der Punkt E auf der Senkrechten durch C liegen muss.

Die Lehrkraft gibt zu bedenken, dass nun die Symmetrieachse zu A und E gefunden werden müsse. Die Klasse schägt vor, die Verbindungsstrecke von A und E zu zeichnen, den Mittelpunkt zu konstruieren und eine Senkrechte durch den Mittelpunkt zu erzeugen. Diese Senkrechte entspricht der Symmetrieachse bzw. der Winkelhalbierenden.

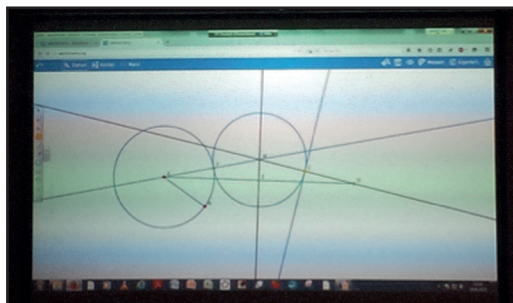
Die Schülerinnen werden gefragt, welche Objekte zur Bestimmung des Mittelpunktes notwendig seien. Sie antworten, dass nun zwei Geraden bekannt seien, auf denen der Mittelpunkt liegen müsse. Der Schnittpunkt dieser Geraden sei der Mittelpunkt M . Nun müsse noch der Kreis um M mit dem Radius \overline{MC} gezeichnet werden.



Anschließend könne noch der Berührungspunkt D des neuen Kreises mit dem ursprünglichen Kreis eingezeichnet werden.

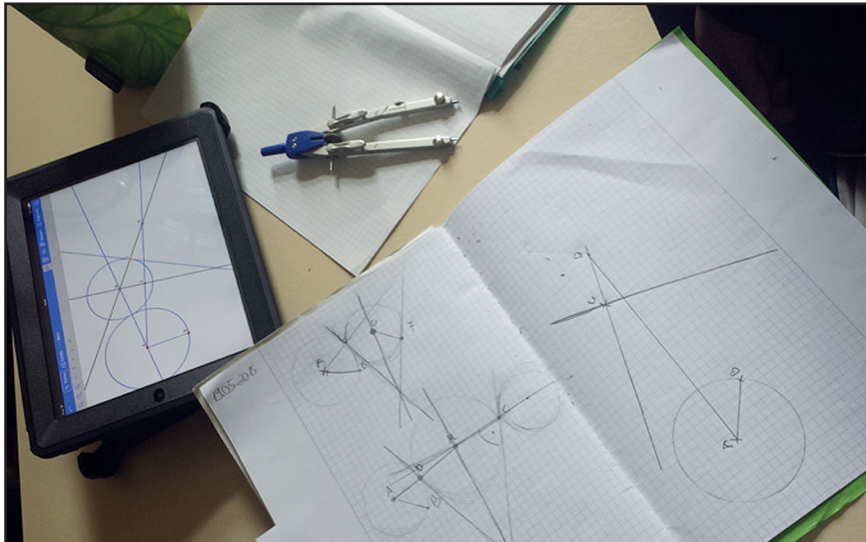
Präsentation der Lösung

Die Schülerinnen setzen die beschriebenen Schritte mit sketchometry am Tablet um. Einige Arbeitsgruppen präsentieren ihre Ergebnisse drahtlos mithilfe des Projektors:



Ein paar Schülerinnen können die letzten Lösungsschritte nicht nachvollziehen und sind daher nicht in der Lage, die dynamische Konstruktion am Tablet zu vervollständigen. Andere Schülerinnen wiederum verfügen über mangelnde Kenntnisse der verschiedenen Gesten, die zur Lösung nötig sind. Hier können sich die Siebtklässlerinnen jedoch gegenseitig Hilfestellung geben.

Auf Nachfrage, wie man die Konstruktion auf ihre Richtigkeit überprüfen könne, erklären die Schülerinnen, dass die Konstruktion erhalten bleiben müsse, wenn z.B. der Radius des ersten Kreises am Tablet verändert werden würde. Abschließend sollen die Schülerinnen die Konstruktion in ihr Lerntagebuch übertragen:



Fazit

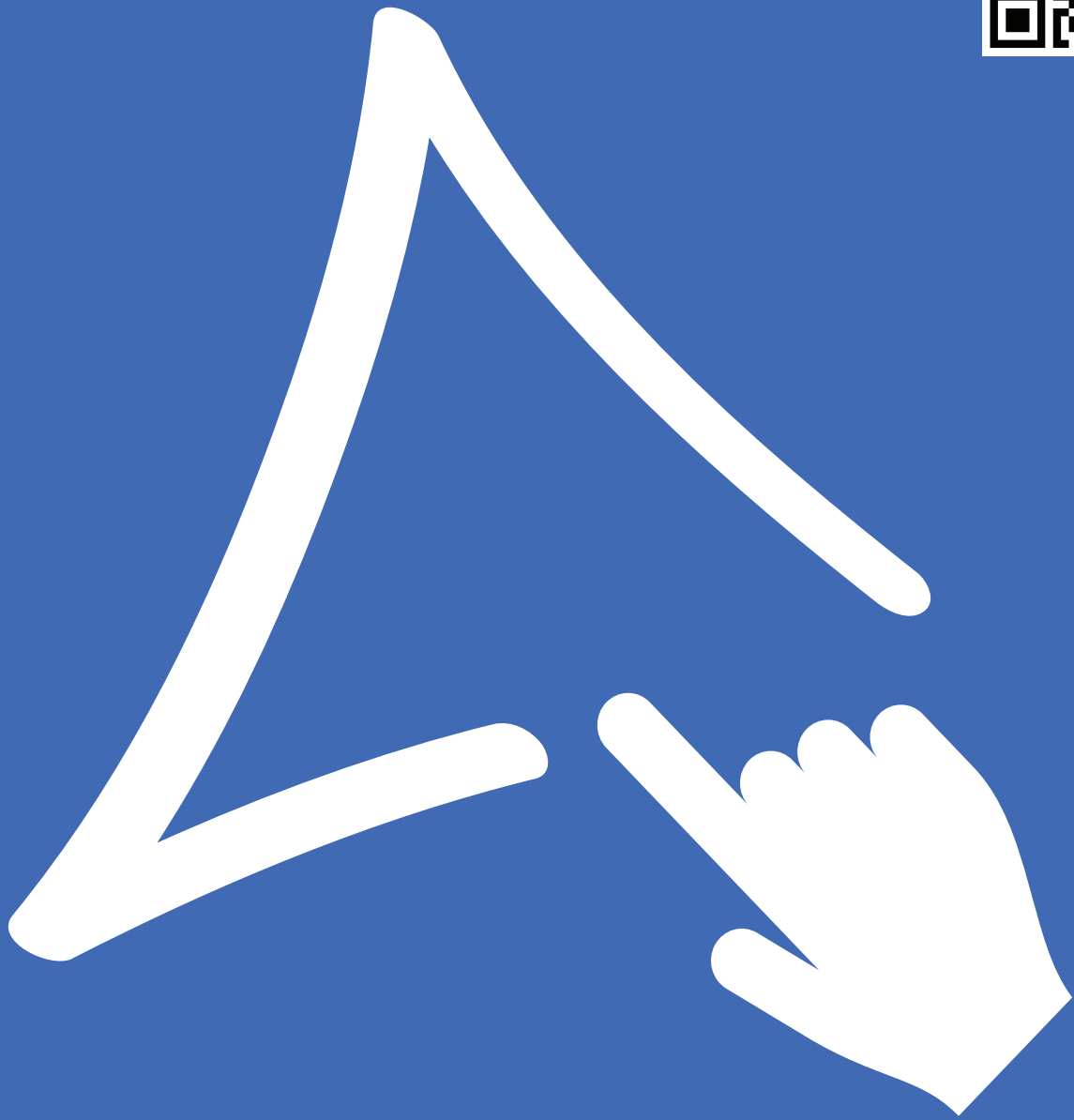
In dieser Stunde wurden zwei Anwendungsaufgaben zum Thema Winkelhalbierende und deren Symmetrieeigenschaften am Tablet bearbeitet. Die zweite Aufgabe kann als anspruchsvoll bezeichnet werden. Daher eignet sich das hier gewählte gelenkte Entdecken.

Aufgrund der Komplexität der Aufgabenstellung bietet der Einsatz dynamischer Mathematiksoftware hier Vorteile:

- ▶ Zunächst wurde der gesuchte Kreis so eingepasst, dass er beide gegebenen Objekte berührt. Damit erhielten die Schülerinnen eine Vorstellung von der Lösung der Aufgabe.
- ▶ Der Einsatz der Gesten-Werkzeuge (Mittelpunkt und Senkrechte) hält die Konstruktion übersichtlich, da Hilfsobjekte nicht zusätzlich verwirren.
- ▶ Am Ende konnte die Allgemeingültigkeit der Konstruktion durch Verändern der Ausgangsobjekte Kreis, Gerade und Gleiter überprüft werden.



<http://sketchometry.org>



sketchometry