

# sketchometry

GEOMETRIE

90  
Minuten  
Workshop

Rückgängig

Eigenschaften ändern (Name, Farbe, Spur, Gitter, ...)

Ziehen/Konstruieren

Löschen

Messen

Galerie

Menüleiste

Weitere Werkzeuge

Verstecken

Kurve zeichnen

Cloudanbindung

Grundeinstellungen

Neue Zeichenfläche

Galerie

Zeichenfläche

Aktuelle Zeichenfläche

sketchometry.org

A


## Geometrie mit dem Finger


Im Mathematikunterricht stellt Dynamische Mathematiksoftware zur Visualisierung geometrischer Zusammenhänge seit jeher einen festen Bestandteil des Medieneinsatzes dar.

sketchometry ist eine neuartige dynamische Mathematiksoftware, mit der interaktive Konstruktionen auf Tablets oder Smartphones schnell und einfach erstellt und untersucht werden können. Die innovative Gestenbedienung von sketchometry verwandelt mobile Geräte in einen elektronischen „Skizzenblock“, der unmittelbar im Klassenzimmer eingesetzt werden kann.

### Workshop

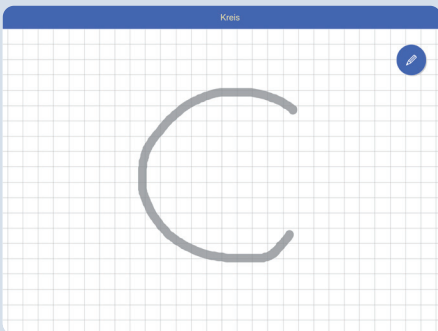
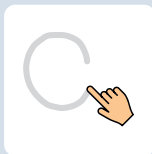
Dieser Workshop stellt dir Schritt für Schritt das Bedienkonzept und verschiedene Einsatzmöglichkeiten von sketchometry im Geometrieunterricht vor. Die Bearbeitung dauert etwa 90 Minuten. Verwende für die folgenden Beispiele jeweils eine neue Zeichenfläche.

Wähle dazu in der sketchometry-Galerie das Symbol  **Neu**.

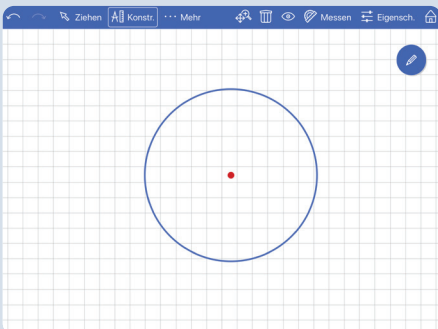
Die Galerie erreichst du über das  Symbol in der oberen rechten Ecke der blauen Menüleiste der Zeichenfläche.

### Skizzenblock

Skizziere mit dem Finger auf die leere Zeichenfläche einen Kreis.





Sobald du den Finger anhebst, erscheint der Kreis samt Mittelpunkt.






Du musstest vorab kein gesondertes Werkzeug „Kreis“ wählen.



B

### Ziehen und Konstruieren

sketchometry kennt zwei Bedienungsarten:  **Ziehen** und  **Konstruieren**. Diese können unabhängig voneinander genutzt werden. Die Bedienungsart, die gerade gewählt ist, wird durch einen Rahmen hervorgehoben.

Zu Beginn empfiehlt es sich  **Ziehen** und  **Konstruieren** getrennt voneinander zu verwenden:

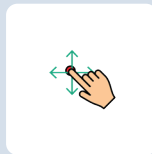
Willst du ein neues Objekt zeichnen, so aktiviere nur  **Konstruieren**. Dadurch bewegst du die bestehenden Objekte nicht versehentlich.

Möchtest du die Lage eines Objekts verändern, so schalte  **Ziehen** ein und  **Konstruieren** aus.

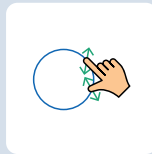
Mit etwas Übung kannst du später beide Bedienungsarten gleichzeitig nutzen.

sketchometry erkennt die Fingerskizze (=Geste) automatisch.

Die Lage des Kreises veränderst du mit dem Finger, indem du entweder an der Kreislinie oder am Mittelpunkt ziehst.



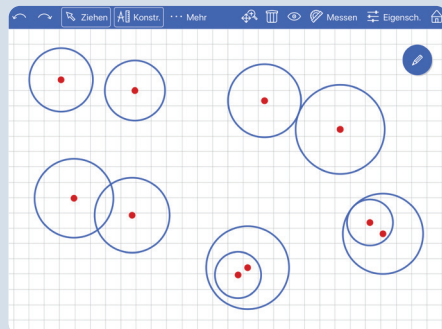
Die Größe eines Kreises veränderst du mit zwei Fingern: „Fasse“ dazu die Kreislinie an zwei Stellen an und bewege die Finger aufeinander zu bzw. voneinander weg. Diese sogenannte Pinch-Geste ist vom Zoomen von Fotos am Smartphone bekannt.



Erste Erfahrungen können mit folgender Aufgabe gesammelt werden:

*Zeichne zwei Kreise und untersuche die Lagebeziehungen der beiden Kreise zueinander. Verändere dazu Position und Größe der Kreise.*

Durch Verschieben sowie Vergrößern und Verkleinern der Kreise betrachten und beschreiben die Schülerinnen und Schüler verschiedene Lagebeziehungen.

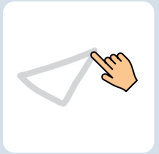


C

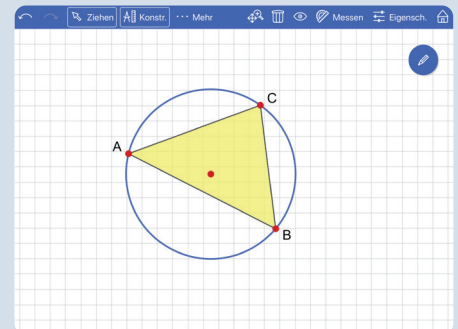
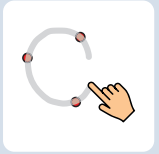
## Umkreis eines Dreiecks

Das Gestenkonzept von sketchometry bietet aber noch mehr. Du erzeugst den Umkreis eines Dreiecks, indem du diesen einfach skizziert.

Starte mit einem Dreieck auf einer neuen Zeichenfläche und zeichne anschließend eine Kreislinie durch die Eckpunkte des Dreiecks.



sketchometry erkennt die Geste und erzeugt den Umkreis des Dreiecks sowie den Mittelpunkt des Umkreises.



Die vorherige Auswahl eines Werkzeugs „Umkreis“ ist nicht erforderlich.

Dieser direkte Weg einen Umkreis zu erzeugen bietet sich etwa an, wenn die Konstruktion des Umkreises und seine Eigenschaften bereits im Unterricht behandelt wurden.

Mithilfe dieser Konstruktion lässt sich beispielsweise folgende Aufgabe bearbeiten:

*Welche besonderen Dreiecksformen entstehen, wenn der Umkreismittelpunkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks bzw. auf einer Seite liegt?*

### Nah am Objekt


Das Motto von sketchometry lautet „nahe am Objekt“. Kreise, Punkte, Schnittpunkte, Geraden, Strecken oder auch Dreiecke werden skizziert. Die Software erkennt diese Gesten und erzeugt daraus exakte Objekte, die zudem veränderbar sind.

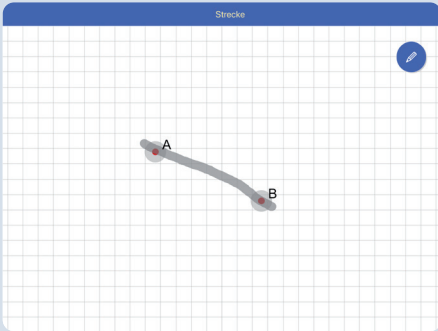
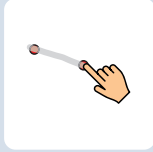
Dadurch verzichtet sketchometry auf eine komplexe Menüstruktur, was gerade auf kleinen Bildschirmen von Vorteil ist.

Überlegungsfiguren und Konstruktionen entstehen am Smartphone, Tablet oder an der elektronischen Tafel auf diesem Weg sehr schnell und können unmittelbar untersucht werden.

D


## Mittelsenkrechte und Umkreis

Öffne eine neue Zeichenfläche und deaktiviere  **Ziehen**. Setze auf die Zeichenfläche zwei Punkte A und B und verbinde diese durch eine Strecke: Achte darauf, dass beide Punkte mit dem Finger berührt, d.h. markiert werden. Dies wird durch graue Ringe um die Punkte angezeigt.

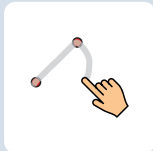


Konstruiere nun die Mittelsenkrechte als Menge aller Punkte, welche von den beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind:

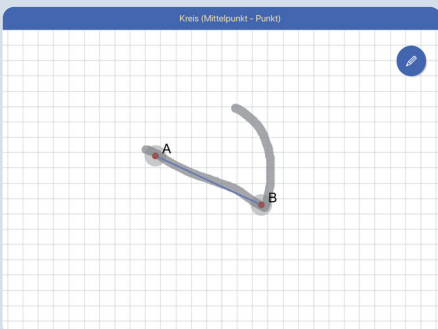
Dazu erzeugst du zwei Kreise. Der erste Kreis mit Mittelpunkt A verläuft durch Punkt B und der zweite Kreis besitzt den Mittelpunkt B, wobei seine Kreislinie durch A geht.

sketchometry stellt eine passende Geste zur Verfügung.  **Ziehen** ist wieder deaktiviert.

Starte mit dem ersten Kreis mit Mittelpunkt A. Die passende Kreis-Geste besteht aus zwei Teilen, die *ohne* Unterbrechung skizziert werden müssen:



1. Beginne mit der Geste kurz vor Punkt A und bewege den Finger bis über Punkt B hinaus. Du gibst damit den Radius des Kreises an (vgl. Strecken-Geste).
2. Deute nun ohne abzusetzen einen Viertelkreis an.

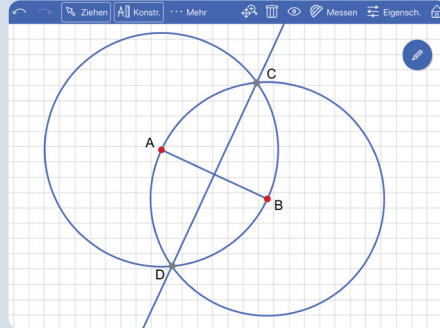
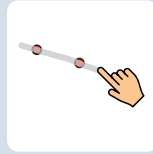


sketchometry erkennt dies als Geste **Kreis (Mittelpunkt - Punkt)** und erzeugt den Kreis.


Der Kreis um B durch A entsteht analog. Im nächsten Schritt tippst du die beiden

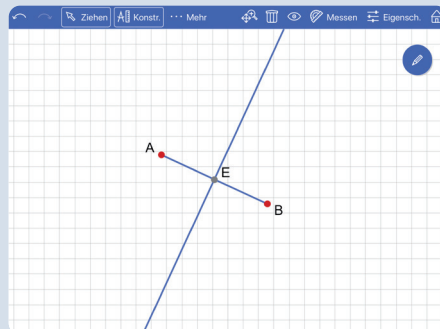
E

Schnittstellen der Kreise nacheinander an und die Schnittpunkte erscheinen. Zum Schluss skizziert du eine Gerade durch die Schnittpunkte, die Mittelsenkrechte.







Gegebenenfalls kannst du noch den Schnittpunkt der Strecke mit der Mittelsenkrechten erzeugen, welcher die Strecke halbiert.

Blende abschließend die „Hilfsobjekte“ (hier die beiden Kreise und deren Schnittpunkte) mit dem  **Verstecken**-Werkzeug aus. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten ist somit abgeschlossen.



Um den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks zu erhalten, müsstest du diese Konstruktion an mindestens zwei Dreiecksseiten durchführen. Das ist ziemlich aufwendig.

### Objekte verstecken

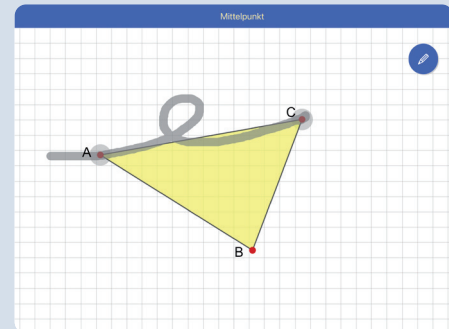
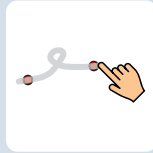
Aktiviere das Werkzeug  **Verstecken**. Tippe nacheinander die Objekte an, die du verbergen möchtest. Sie werden etwas blasser dargestellt. Sobald du auf  in der blauen Menüleiste klickst, verschwinden die versteckten Objekte vollständig (sind aber intern noch vorhanden). Möchtest du ein Objekt wieder anzeigen, aktiviere erneut  **Verstecken**. Die versteckten Objekte erscheinen wieder blass angedeutet. Tippe auf das Objekt, das du wieder anzeigen möchtest. Es wird wieder *normal* dargestellt. Tippe schließlich erneut auf das  **X**.

F

Nutze daher sketchometry-Gesten und nimm dabei das Wort **Mittelsenkrechte** wörtlich, *Mitte* und *Senkrechte*.

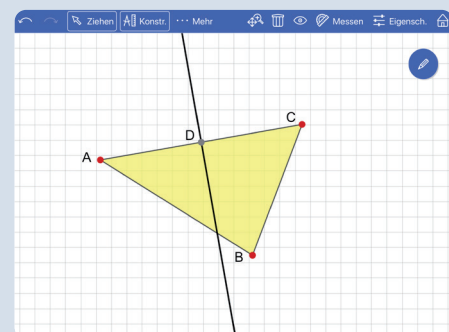
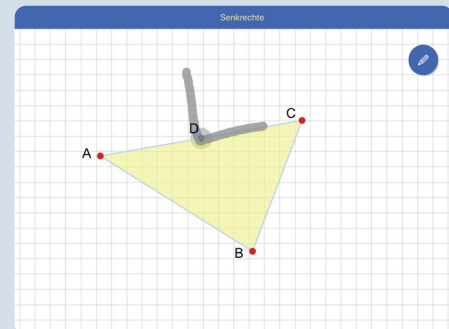
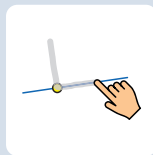
Erzeuge zunächst in einer neuen Zeichenfläche ein Dreieck und dann die Mitte zwischen zwei Eckpunkten, also den Mittelpunkt einer Seite.

Die Geste **Mittelpunkt** sieht aus wie eine Schleife. Markiere beim Skizzieren der Geste die beiden Endpunkte der Dreiecksseite.



Im nächsten Schritt zeichnest du eine Senkrechte zur Dreiecksseite durch diesen Mittelpunkt. Natürlich wieder mit einer Geste:

Du deutest die Senkrechte einfach durch einen rechten Winkel als großes L an. Achte beim Zeichnen der Geste darauf, dass du am Gestenknick den Mittelpunkt markierst (grauer Ring).



Diese beiden Schritte wiederholst du für die beiden verbleibenden Dreiecksseiten.

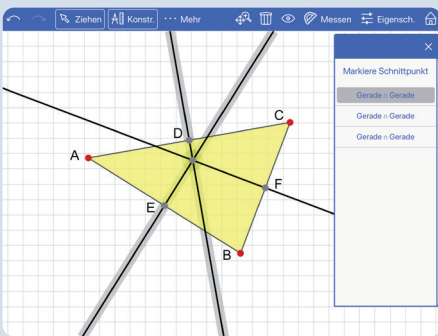


Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt. Auf eine Begründung dieser Schnitteigenschaft darf im Unterricht nicht verzichtet werden:

*Alle Punkte auf der ersten Mittelsenkrechten sind gleich weit von A und B entfernt, alle Punkte auf der zweiten Mittelsenkrechten sind gleich weit von B und C entfernt. Daher gilt für den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten, dass dieser von A, B und C gleich weit entfernt ist und so auf der dritten Mittelsenkrechten liegen muss.*

Fast am Ziel, musst du nur noch den Schnittpunkt und den Umkreis hinzufügen. Tippe die Schnittstelle der drei Mittelsenkrechten an.

Zunächst erscheint noch kein Schnittpunkt. sketchometry präsentiert eine Liste mit verschiedenen Schnittmöglichkeiten.



Wähle eine davon durch Antippen aus. Der Mittelsenkrechtenschnittpunkt erscheint.

### Schnitt von mehr als zwei Objekten

Ein Schnittpunkt ist aufgrund der Lage von *zwei* Objekten (Geraden, Kreise) bereits eindeutig festgelegt.

Liegen an der betreffenden Stelle jedoch drei oder mehr Objekte, fragt sketchometry nach und zeigt eine Liste der möglichen Schnitte zweier Objekte an.

Eine der Schnittmöglichkeiten kann durch Antippen des entsprechenden Listeneintrags ausgewählt werden.

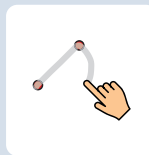
Bleibt der Finger auf dem Listeneintrag liegen, werden die beiden Schnittobjekte auf der Zeichenfläche optisch hervorgehoben. Wird der Finger auf einen anderen Listeneintrag bewegt, so werden die beiden neuen Schnittobjekte hervorgehoben. Erst beim Anheben des Fingers wird der entsprechende Schnittpunkt erzeugt.

### Hintergrund

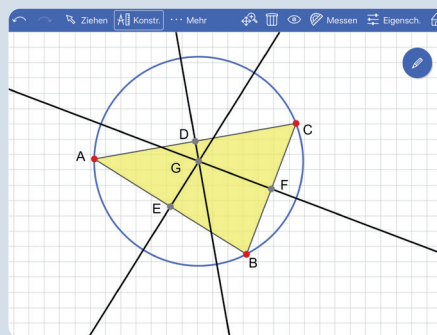
Das skizzenhafte Andeuten von Objekten, ein Kreis wird als solcher skizziert, ebenso eine Gerade oder ein Dreieck, stellt einen engen Bezug zwischen seiner Entstehung und dem fertigen Objekt her. Im Vergleich zu herkömmlicher Geometriesoftware, bei der beispielsweise zum Erzeugen eines Kreises etwa der Mittelpunkt und ein Punkt auf der Kreislinie separat gewählt werden müssen, erlaubt sketchometry diese direkte Vorgehensweise.

Dem Einsatz des Fingers kommt hier eine entscheidende Rolle zu. In aktuellen Untersuchungen wurde der Bedeutung des Fingers beim Berühren von Lernobjekten (auch bei Abbildungen) eine besondere Wirkung zugeschrieben. Es werden durch das zusätzliche Zeigen oder auch Nachfahren von Lerngegenständen größere Hirnareale aktiviert, was zu einer besseren Verankerung von Lerninhalten führt. sketchometry nutzt dieses Prinzip konsequent aus.

Abschließend erzeugst du den Umkreis mithilfe der bereits bekannten Geste **Kreis (Mittelpunkt - Punkt)**.



Fertig ist die Konstruktion. Das Ergebnis entspricht dem des ersten Beispiels mit der Kreis-Geste durch die drei Eckpunkte.



Abhängig vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler wird entweder das Gestenwerkzeug **Kreis** (durch drei Punkte) oder das schrittweise Vorgehen gewählt.

### Inkreis eines Dreiecks

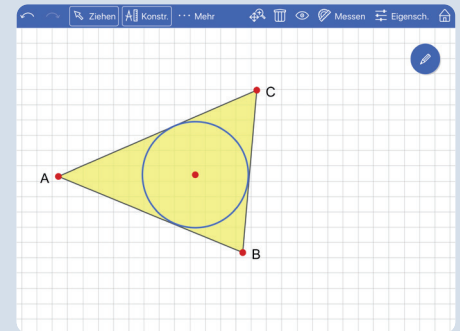
Der Umkreis verläuft durch die Eckpunkte eines Dreiecks, das Dreieck liegt im Inneren des Kreises.

Perspektivenwechsel: Im nächsten Beispiel steht nun der Inkreis im Vordergrund, der die drei Seiten des Dreiecks von innen berührt. Im Unterricht kann folgende Frage gestellt werden:

*Gibt es einen Kreis, der alle drei Dreiecksseiten von innen berührt?*

Die Schülerinnen und Schüler können diese Frage analog dem hier dargestellten Vorgehen erkunden:

Zeichne ein Dreieck und einen Kreis. Positioniere den Kreis mit zwei Fingern so, dass er die drei Seiten des Dreiecks berührt.

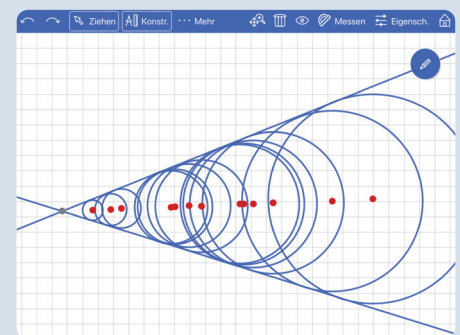


Dies ist natürlich keine Konstruktion. Hier wird sketchometry wieder als Skizzenwerkzeug eingesetzt.

Verändere das Dreieck und positioniere den Kreis erneut. Es wird immer einen Kreis geben, der die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die Konstruktion des Inkreises wird nun schrittweise entwickelt. Betrachte in einer neuen Zeichenfläche zunächst nur zwei Geraden, die sich schneiden, und markiere den Schnittpunkt.

Zeichne Kreise mit unterschiedlichen Radien und positioniere diese so, dass sie beide Geraden berühren (in demselben Winkelfeld).

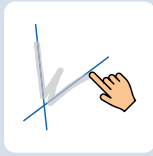


Zeichne eine Gerade, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden und einen der Kreismittelpunkte verläuft.

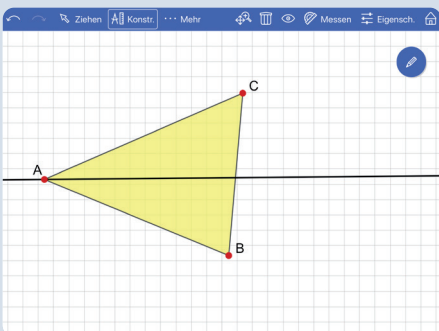
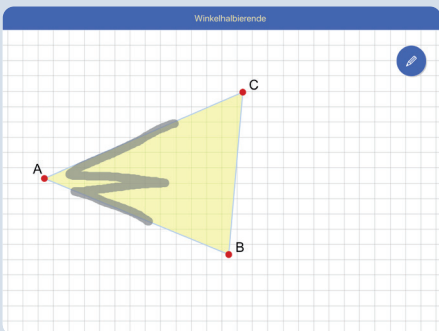
- ▶ Was stellst du fest?
- ▶ Welche Eigenschaft hat diese Gerade bezüglich der beiden Ausgangsgeraden?
- ▶ Begründe deine Vermutung!

Mit diesen Überlegungen wird die Bedeutung der Winkelhalbierenden für die Konstruktion des Inkreises deutlich.

Um die Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks zu erleichtern, gibt es eine passende Geste zur Erzeugung der Winkelhalbierenden. Diese sieht aus wie der Buchstabe W (wie Winkelhalbierende). Gemäß dem sketchometry-Motto „nahe am Objekt“ markierst du beim Zeichnen der Geste zunächst den ersten Schenkel des Winkels, dann den Bereich in dem die Winkelhalbierende liegt und schließlich den zweiten Schenkel.



Erzeuge in einer neuen Zeichenfläche ein Dreieck und eine Winkelhalbierende. Deaktiviere hierzu **Ziehen**.

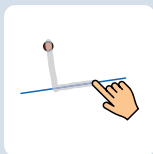


Auf der Winkelhalbierenden liegen nun die Punkte, die von den entsprechenden Dreiecksseiten gleich weit entfernt sind. Füge die Winkelhalbierenden der beiden anderen Winkel hinzu.

Auch hier kann – wie bei den Mittelsenkrechten – argumentiert und gezeigt werden, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt hat von allen drei Seiten den gleichen Abstand.

Jetzt benötigst du zum Zeichnen des Inkreises nur noch dessen Radius. Verwende dazu die bereits bekannte Senkrechten-Geste mit einer kleinen Variation: Deaktiviere **Ziehen**. Beginne die Geste direkt auf dem Punkt und nicht schon davor.

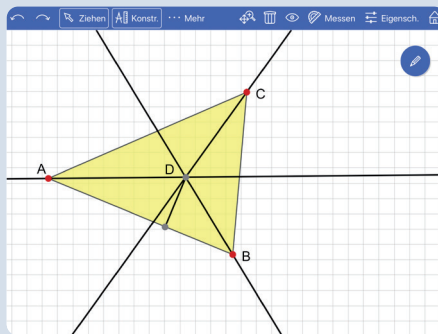
Zusätzlich zu der Lotstrecke erzeugt sketchometry auch den dazugehörigen Lotfußpunkt.



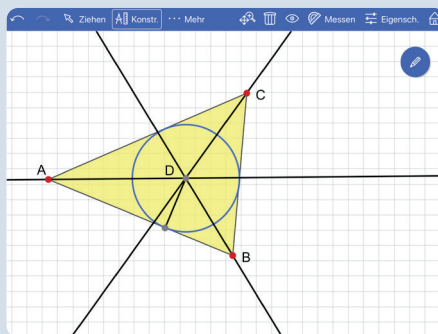
### Gleiter und abhängige Punkte

Tippst du mit dem Finger auf eine leere Stelle der Zeichenfläche, entsteht ein freier Punkt, den du beliebig verschieben kannst. sketchometry stellt diesen Punkt rot dar. Befindet sich an der Stelle jedoch bereits ein Objekt (Gerade, Strecke, Kurve, ...), so erzeugt sketchometry einen sogenannten **Gleiter**. Diesen kannst du entlang der Objektlinie bewegen. Gleiter werden orange dargestellt.

Tippst du auf eine Stelle, an der sich zwei Objekte schneiden, so entsteht ein Schnittpunkt. Diesen kannst du nicht direkt bewegen. Er wird daher grau angezeigt. Auch der Lotfußpunkt wird grau dargestellt, da er als abhängiger Punkt nicht bewegt werden kann.



Jetzt fehlt nur noch der Inkreis, den du mit der **Kreis (Mittelpunkt – Punkt)**-Geste erzeugst. Fertig ist die Inkreis konstruktion.



### Ein anderer Blickwinkel: Tangenten

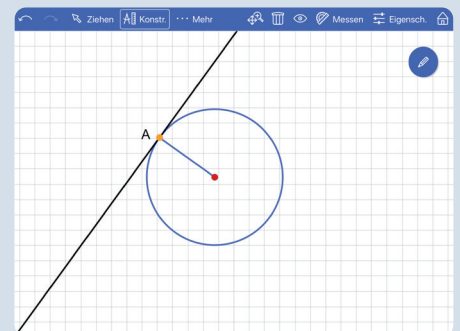
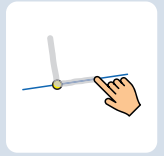
Der Inkreis berührt alle drei Seiten eines gegebenen Dreiecks. Wie sieht die Situation aus, wenn der Kreis gegeben ist und ein Dreieck gesucht wird, dessen Seiten den Kreis berühren?

Zeichne dazu einen Kreis in eine neue Zeichenfläche. Da die Seiten des Dreiecks den Kreis berühren sollen, müssen sie Tangenten an den Kreis sein.

Für die Konstruktion einer Tangente werden nun zwei Varianten betrachtet:

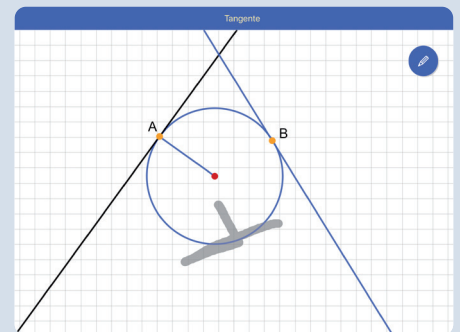
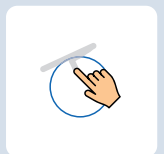
Für die erste Variante kennst du bereits alle erforderlichen Gesten:

- ▶ Setze einen Punkt auf die Kreislinie. Er erscheint als **Gleiter**, der nur entlang der Kreislinie beweglich ist.
- ▶ Zeichne den Radius des Kreises als Strecke vom Mittelpunkt bis zu diesem Gleiter.
- ▶ Erzeuge die Tangente mit der bekannten Geste für die Senkrechte. Achte darauf, dass du den Gleiter beim Gestenknick markierst.



Die zweite Variante mit einer einzigen Geste ist wesentlich eleganter:

Skizziere jetzt an die Kreislinie ein großes T. Die Form des Buchstaben T gibt die Tangentenrichtung und zusätzlich die dazu senkrechte Radiusrichtung an.

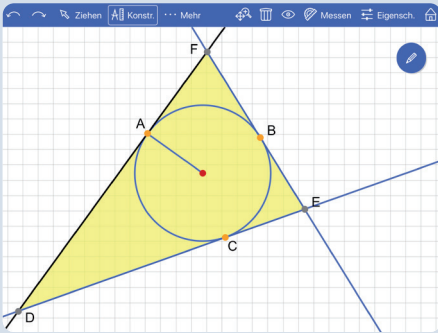


Die Geste ist zudem einfach zu merken: T wie Tangente.

Sie funktioniert übrigens auch bei Funktionsgraphen und Kurven. Zusammen mit der Tangente erzeugt sketchometry den Berührungspunkt als Gleiter.

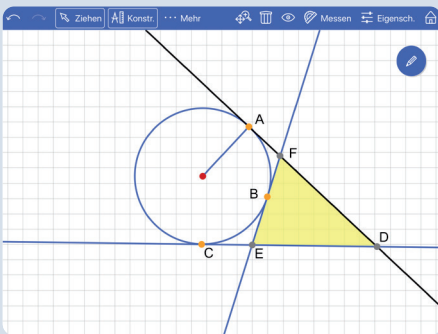
Nachdem du die drei Tangenten an den Kreis hinzugefügt hast, markiere die Schnittpunkte der drei Tangenten. Zeichne abschließend ein Dreieck durch die drei Schnittpunkte, um die Fläche farblich hervorzuheben.

Der ursprüngliche Kreis ist nun der Inkreis der Dreiecks. Verändere die Lage der Berührungspunkte und beobachte die Konstruktion.



### Variationen

Positioniere die drei Gleiter (Berührungspunkte) nun so, dass sie nur in einer Hälfte der Kreislinie liegen.



Was passiert? Und vor allem warum? Es entsteht ein so genannter Ankreis, der Anlass zu weiteren Fragestellungen gibt:

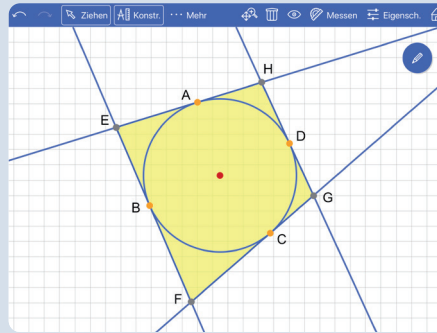
- ▶ Wie kann ein Ankreis konstruiert werden?
- ▶ Wieviele Ankreise hat ein Dreieck?
- ▶ Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Inkreis und den Ankreisen eines Dreiecks?

Diese Fragen bilden beispielsweise die Grundlage für eine Differenzierung im Unterricht. Inhaltlich ist die Vorgehensweise bei den Ankreisen an die beim Inkreis angelehnt, jedoch etwas anspruchsvoller.

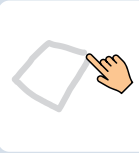
### Tangentenvierecke

Eine weitere Variation entsteht, wenn du statt der drei Tangenten vier Tangenten an den Kreis zeichnest. Erzeuge durch die Schnittpunkte der Tangenten ein Viereck, genauer gesagt ein so genanntes Tangentenviereck.

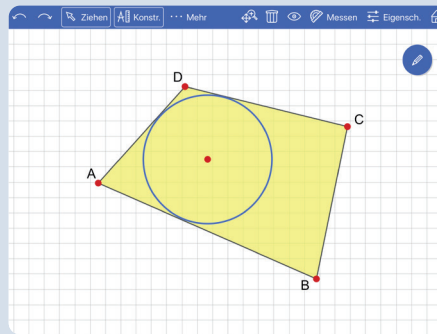
- ▶ Verändere das Viereck so, dass du ein Quadrat bzw. eine Raute erhältst.
- ▶ Gibt es weitere besondere Vierecksformen, die auf diese Weise entstehen?
- ▶ Begründe, warum du kein Rechteck erzeugen kannst?
- ▶ Gibt es Vierecke, die sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis besitzen?



Wechsele auch hier die Perspektive. Gib in einer neuen Zeichenfläche ein Viereck vor, indem du dieses skizzierst.



Zeichne zusätzlich einen Kreis und versuche diesen so zu positionieren, dass er alle vier Seiten des Vierecks berührt. Im Vergleich zum Dreieck gibt es nicht immer eine Lösung. Daher ist es auch hier sinnvoll im Unterricht verschiedene Vierecksformen zu untersuchen.



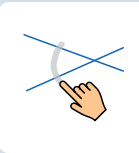
Der Kreis muss immer wieder neu positioniert werden. Die Schülerinnen und Schüler begründen ihre Beobachtungen. Hier wird sketchometry wieder zum Skizzenwerkzeug.

### Messen

Zum Abschluss gibt dieser Workshop einen kurzen Ausblick auf das Werkzeug **Messen**. Damit misst du Längen, Flächen oder auch Winkel.

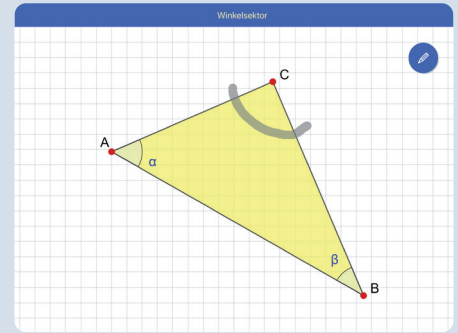
Erzeuge ein Dreieck und markiere dessen Innenwinkel. Wie? Genauso wie an der Tafel.

Skizziere beginnend am ersten Schenkel des Winkels einen Bogen bis zum zweiten Schenkel. Achte darauf, dass sketchometry Winkel immer gegen den Uhrzeigersinn behandelt. Füge auch die beiden anderen Innenwinkel hinzu.



### Weitere Informationen

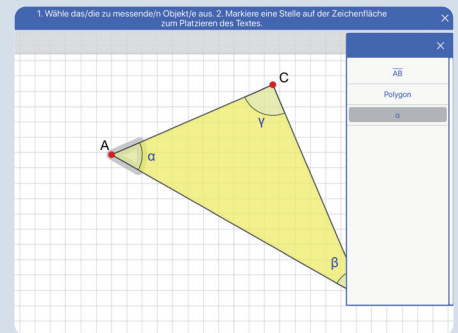
Auf [sketchometry.org](https://sketchometry.org) stehen Gestenübersichten, Anleitungen, druckbare Arbeitsblätter und vieles mehr zum kostenlosen Download bereit.



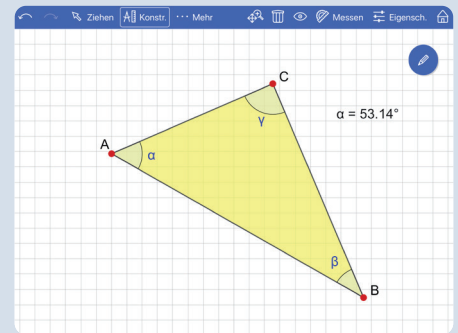
### Winkel messen

Sobald du einen Winkel gezeichnet hast, kannst du dessen Größe auch messen. Aktiviere dazu das Werkzeug **Messen** und tippe auf den Bogen des Winkels. Befinden sich an der Stelle, die du antippst mehrere Objekte, die gemessen werden können, öffnet sketchometry zunächst eine Auswahlliste:

Wähle aus der Liste den Winkel aus (hier im Beispiel  $\alpha$ ). Anschließend erscheint unterhalb der Menüleiste die Messung als Vorschau grau hinterlegt.



Tippe abschließend auf eine freie Stelle der Zeichenfläche, um die Messung zu platzieren.



Längen und Flächen misst du genauso:

- ▶ Aktiviere **Messen**.
- ▶ Tippe auf das zu messende Objekt und wähle dieses ggf. aus der Auswahlliste aus. Die Vorschau erscheint.
- ▶ Platziere die Messung auf der Zeichenfläche.
- ▶ Deaktiviere **Messen** mit **X**.

Sobald du die Lage oder die Größe eines gemessenen Objektes veränderst, passt sich die Messung automatisch an.